Auf diesem Blatt soll es um die Potenzgesetze gehen. Potenzen werden bereits in Klasse 5 eingeführt. Im neunten Schuljahr geht es nun darum, allgemeine Gesetzmäßigkeiten zu entwickeln, um mit Potenzen rechnen zu können. Außerdem werden einige Spezialfälle erläutert, deren Erklärung im Schulunterricht teilweise untergeht.

1. Was ist eine Potenz?

Eine Potenz ist nichts anderes als eine Kurzschreibweise für längere Multiplikationen mit dem gleichen Faktor. Beispielsweise ist $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3-Mal}} = 8$ eine Potenz. In diesem Zusammenhang gilt es, sich zwei wichtige Begriffe zu merken. Eine Potenz besteht immer aus einer Basis (Grundzahl) und einem Exponenten (Hochzahl). Betrachtet man sich das eben genannte Beispiel, so ist 2 die Basis und 3 der Exponent.
Das Tolle an den Potenzgesetzen ist nun, dass man sie sich alle erklären kann, wenn man die Schreibweise einer Potenz akzeptiert und verstanden hat.

2. Produkte von Potenzen mit gleicher Basis

Zunächst kann man sich fragen, wie man Ausdrücke wie $2^3 \cdot 2^4$ vereinfachen kann. Unter Verwendung der Abkürzung ergibt sich:

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{3-Mal}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4-Mal}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{7-Mal}} = 2^7$$

Jetzt muss man versuchen, einen Zusammenhang zwischen der linken Seite und der rechten Seite der Gleichung herzustellen. Konkret werden Potenzen mit gleicher Basis multipliziert, indem die Exponenten addiert werden. Allgemein lautet das Gesetz also:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{n+m}}$$

3. Produkte von Potenzen mit gleichem Exponenten

Auf die gleiche Art und Weise kann man Ausdrücke wie $3^4 \cdot 5^4$ vereinfachen. Verwendet man die abkürzende Schreibweise einer Potenz, ergibt sich:

$$3^4 \cdot 5^4 = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{4-Mal}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{\text{4-Mal}} = \underbrace{(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5)}_{\text{4-Mal}} = (3 \cdot 5)^4$$

Zusammenfassend erhält man:

$$\boxed{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$$

4. Quotienten von Potenzen mit gleicher Basis

Als nächstes kann man sich fragen, wie man $\frac{3^5}{3^2}$ vereinfachen kann. Zunächst kann man den Ausdruck ausschreiben und erhält:

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3}$$

Durch das Anwenden der bekannten Kürzungsregeln ergibt sich:

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$$

Betrachtet man nun die linke und rechte Seite der Gleichungskette, so stellt man fest, dass folgendes gilt:

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^3 = 3^{5-2}$$

Das bedeutet, dass wenn man Potenzen mit gleicher Basis dividieren will, man die Exponenten subtrahieren muss. Allgemein lautet die Regel:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

5. Quotienten von Potenzen mit gleichem Exponenten
Nun kann man sich ebenfalls Ausdrücke wie $\frac{6^4}{7^4}$ anschauen. Zunächst wird er wieder ausgeschrieben:

$$\frac{6^4}{7^4} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}$$

Als nächstes verwendet man eine bekannte Rechenregel, die bei Brüchen immer gilt:

$$\frac{6^4}{7^4} = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7}$$

Hier sollte man sich nochmal ins Gedächtnis rufen, dass man Brüche multipliziert, indem man Zähler und Nenner multipliziert. Abschließend wird wieder die neu eingeführte Potenzschreibweise verwendet:

$$\frac{6^4}{7^4} = \left(\frac{6}{7}\right)^4$$

Allgemein erhält man die Gesetzmäßigkeit:

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

6. Potenzieren von Potenzen
Das letzte Potenzgesetz befasst sich mit Termen wie $(5^3)^2$. Der Term wird erneut ausgeschrieben:

$$(5^3)^2 = \underbrace{(5^3) \cdot (5^3)}_{\text{2-Mal}} = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5)$$

Abschließend zählt man die Anzahl der 5-en und erhält:

$$(5^3)^2 = 5^6 = 5^{3 \cdot 2}$$

Allgemein lautet die Regel:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

7. Spezialfälle
Mit dem gewonnenen Wissen kann man sich nun überlegen, was 3^0 ergibt. Durch Anwendung der Gesetze erhält man:

$$3^0 = 3^{2-2} = \frac{3^2}{3^2} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 1$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{a^0 = 1 \quad \text{für } a \neq 0}$$

Ein weiterer Spezialfall sind Brüche mit rationalem Exponenten wie $3^{\frac{1}{2}}$. Per Definition gilt in diesem Fall:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \quad 5^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{5}$$

Allgemein ergibt sich die Regel:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$